Formelsammlung Finanzmathematik

$$C(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (x_i - E[x]) \cdot (y_i - E[y])$$

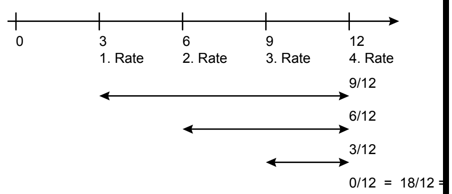
$$\ldots_t = \sqrt[n]{\pi_{t=1}\left(\frac{D_t + P_t}{P_{t-1}}\right)} - 1$$

$$PV(A) = \sum_{t=1}^{n \cdot m}\left(\frac{\frac{1}{m} \cdot C_t}{\left(1+\frac{r_M}{m}\right)^t} + \frac{R}{\left(1+\frac{r_M}{m}\right)^{n \cdot m}}\right)$$

1. Zinsformen

Einfache Verzinsung lineare Verzinsung	Aufzinsung	K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100) n = Gesamtlaufzeit in Jahren	$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100} \cdot n)$
	Abzinsung	K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100) n = Gesamtlaufzeit in Jahren	$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i \cdot n)} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100} \cdot n)}$
Zinses-Zins exponentielle Verzinsung	Aufzinsung	K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100) q = Aufzinsungsfaktor (=1+i) n = Gesamtlaufzeit in Jahren	$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ $= K_0 \cdot q^n$
	Abzinsung	K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100) q = Aufzinsungsfaktor (= 1+i) n = Gesamtlaufzeit in Jahren v = Abzinsungsfaktor (= 1/q)	$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100})^n} = K_n \cdot \frac{1}{q^n} =$ $= K_n \cdot v^n$
Unterjährige Verzinsung	nominelle	p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100)	$p_{nom} = p$ $q_{nom} = (1 + \frac{p}{100}) = (1 + i)$
	relative	p = Zinsfuss i = Zinssatz (= p/100)	$p_{rel} = p \cdot \frac{1}{m} = \frac{p}{m}$ $q_{rel} = (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{m}) = (1 + \frac{i}{m})$
	effektive	i = Zinssatz (= p/100) m = Anz. Verzinsungen pro Jahr K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital n = Gesamtlaufzeit in Jahren	$p_{eff} = 100 \cdot (q_{eff} - 1)$ $q_{eff} = (1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{m})^m = (1 + \frac{i}{m})^m$ $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100} \frac{1}{m})^{mn} = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{mn}$
	konforme	Siehe Rentenformen	
Gemischte Verzinsung	Laufendes Jahr wird linear, volle Jahre exponentiell und letztes angefangenes Jahr wieder linear verzinst.		
Stetige Verzinsung		e = Euler'sche Konstante i = Zinssatz nominell K_n = Endkapital K_0 = Anfangskapital	$q_{eff} = e^i = e^{\frac{p}{100}}$ $p_{eff} = 100 \cdot (e^i - 1) = 100 \cdot (e^{\frac{p}{100}} - 1)$ $K_n = K_0 \cdot (e^{\frac{p}{100}})^n = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot n} = K_0 \cdot e^{i\, n}$ $K_0 = \frac{K_n}{q_{eff}^{\ n}}$

2. Rentenformen

Theorie	Renten sind vorschüssig / Sparen ist nachschüssig / Leasing (Miete) ist vorschüssig		
Endwert	vorschüssig	R_n = Rentenendwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor s_n' = Endwertfaktor vorschüssig n = Anzahl Raten	$R_n' = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot s_n'$
	nachschüssig	R_n = Rentenendwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor s_n = Endwertfaktor nachschüssig n = Anzahl Raten	$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot s_n$
	Umrechnung vor- ↔ nachschüssig		$s_n' = s_{n+1} - 1$
Barwert	vorschüssig	R_0 = Rentenbarwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor a_n' = Barwertfaktor vorschüssig n = Anzahl Raten	$R_0' = r \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot a_n'$
	nachschüssig	R_0 = Rentenbarwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor a_n = Barwertfaktor nachschüssig n = Anzahl Raten	$R_0 = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot a_n$
	Umrechnung vor- ↔ nachschüssig		$a_n' = a_{n-1} + 1$
Unterjährige Renten	Methode A	$\bar{r}$ = Rate einer Frist r = Rate **eines** Jahres für End - oder Barwertformel n = Anzahl Fristen f = Fristenmittel i = Zinssatz	$r = \bar{r} \cdot n + \bar{r} \cdot i \cdot f = \bar{r} \cdot (n + i \cdot f)$
		Fristenmittel (f) f (vorschüssig): $\frac{n+1}{2}$ f (nachschüssig): $\frac{n-1}{2}$ n = Anzahl Raten pro Jahr	Aufaddieren der anteiligen Restlaufzeiten der Raten. z.B. bei vierteljährlicher, nachschüssiger Zahlung: 
	Methode B (konformer Zinssatz)	q_{konf} = q für End- oder Barwertformel q_{rel} = relativer Aufzinsungsfaktor i = Zinssatz m = Anzahl Verzinsungen p. a. $\bar{r}$ = Rate einer Frist x = Anzahl Ratenzahlungen innerhalb einer Zinsperiode	$q_{konf} = \sqrt[x]{q_{rel}} = \sqrt[x]{(1 + \frac{i}{m})}$ $X = \frac{\text{Anzahl Raten p. a.}}{m}$ Hinweise: Es wird fast immer von jährlicher Verzinsung ausgegangen, also m =1, ausser bei anderen Angaben, z. B. Sparplänen.) Zusätzlich muss $\bar{r}$ als Rate in die End- oder Barwertformel eingesetzt werden.

2. Rentenformen (Forts.)

Progressive Renten	vorschüssig	R_n = Endwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor t = Progressionsfaktor n = Anzahl Raten R_0 = Barwert	$R_n' = r \cdot q \cdot \frac{q^n - t^n}{q - t}$ $R_0' = r \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - t^n}{q - t}$
	nachschüssig	R_n = Endwert r = Rate / Rente q = Aufzinsungsfaktor t = Progressionsfaktor n = Anzahl Raten R_0 = Barwert	$R_n = r \cdot \frac{q^n - t^n}{q - t}$ $R_0 = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - t^n}{q - t}$
	Progressions-faktor	u = Prozentsatz der Veränderung t = Progressionsfaktor	$t = (1 \pm u)$ mit t > 1 progressive Rente t = 1 konstante Rente t < 1 degressive Rente
Ewige Renten **(Barwerte)**	vorschüssig	R_0 = Barwert q = Aufzinsungsfaktor i = Zinssatz nachschüssig r = Rate / Rente	$R_0' = \frac{r \cdot q}{q - 1} = \frac{r \cdot q}{i} = \frac{r \cdot 100 \cdot q}{p}$. (bei mehreren Raten pro Jahr konformer i, Methode B bei unterjährigen Renten, r ist dabei die effektive (z.B. monatliche) Rente)
	nachschüssig	R_0 = Barwert q = Aufzinsungsfaktor i = Zinssatz r = Rate / Rente	$R_0 = \frac{r}{q - 1} = \frac{r}{i} = \frac{100 \cdot r}{p}$ (bei mehreren Raten pro Jahr konformer i, Methode B bei unterjährigen Renten, r ist dabei die effektive (z.B. monatliche) Rente)
Leibrenten	Die Leibrente ist an die Lebensdauer des Empfängers gebunden und ist daher eine endliche Rente, bei der Bar- und Endwertberechnung normal möglich sind. Die Anzahl Jahre muss aus der Sterbetafel entnommen werden. Berechnung erfolgt via Barwertformeln Seite 2, die Laufzeit n muss aus der Sterbetafel ”Formeln und Tafeln” gelesen werden, Kolonne e_x respektive e_y, x für die Frauen, y für die Männer.		

3. Verschuldungsformen

<table>
<tr><td rowspan="4">Arten</td><td rowspan="2">ohne Tilgung während der Laufzeit</td><td>Einmalige Schuld</td><td>Rückzahlung von Kapital und Zins am Ende der Laufzeit (z.B. Geldmarktinstrumente, Festgelder, etc.)</td></tr>
<tr><td>Zinsschuld / - anleihe</td><td>Zinsen laufend (z.B. jährlich), Rückzahlung des Kapitals am Ende der Laufzeit (z.B. Obligationen)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">mit Tilgung während der Laufzeit</td><td>Ratenschuld</td><td>konstante (Tilgungs-)Raten (z.B. jährlich), Zinsen sind abnehmend (z.B. 2. Hypotheken)</td></tr>
<tr><td>Annuitätenschuld</td><td>Jährliche Aufwendung konstant (Zins inkl. Tilgung), (z.B. Kleinkredite, Euro-Hypotheken)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Annuitätenanleihe
(immer nachschüssig)</td><td>Tilgungsplan</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th>Jahr</th><th>Kapital zu Beginn des Jahres</th><th>Zinsen am Ende des Jahres</th><th>Tilgung am Ende des Jahres</th><th>Jahresaufwand</th></tr>
<tr><td>1</td><td>K_0</td><td>z_1</td><td>T_1</td><td>$z_1 + T_1$ (= A)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$K_1=K_0-T_1$</td><td>$z_2=z_1-(T_1 \cdot i)$</td><td>$T_2=T_1+(T_1 \cdot i)=T_1 \cdot q$</td><td>$z_2 + T_2$ (= A)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$K_2=K_1-T_2$</td><td>$z_3=z_2-(T_2 \cdot i)$</td><td>$T_3=T_2+(T_2 \cdot i)=T_2 \cdot q=T_1 \cdot q^2$</td><td>$z_3 + T_3$ (= A)</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Tilgungsrate am Ende des 1. Jahres</td><td>T_1 = 1. Tilgungsrate
n = Anzahl Tilgungsjahre
K_0 = Kapital zu Beginn
s_n = Endwertfaktor nachschüssig
q = Aufzinsungsfaktor</td><td>$$T_1 = \frac{K_0}{s_n} = \frac{K_0}{\frac{q^n - 1}{q-1}} = \frac{K_0 \cdot (q-1)}{q^n - 1}$$</td></tr>
<tr><td>Tilgungsrate am Ende des k-ten Jahres</td><td>T_k = Tilgungsrate Ende k-ten J.
T_1 = 1. Tilgungsrate
q = Aufzinsungsfaktor (1+i)
k = ”Jahrzahl”</td><td>$$T_k = T_1 \cdot q^{k-1} \qquad [\text{für } 1 \le k \le n]$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Barwert K_0</td><td>T_1 = 1. Tilgungsrate
n = Anzahl Tilgungsjahre
K_0 = Kapital zu Beginn
s_n = Endwertfaktor nachschüssig</td><td>$$K_0 = T_1 \cdot s_n = T_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$</td></tr>
<tr><td>K_0 = Kapital zu Beginn
n = Anzahl Jahre
A = Annuität
a_n = Barwertfaktor nachsch
q = Aufzinsungsfaktor (1+i)</td><td>$$K_0 = A \cdot a_n = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$</td></tr>
<tr><td>Restschuld K_k</td><td>K_k = Restschuld Ende k-ten J.
K_0 = Kapital zu Beginn
T_1 = 1. Tilgungsrate
k = ”Jahrzahl”
s_k = Endwertfaktor nachschüssig

Im Tilgungsplan ist für das k-te Jahr $K_{(k-1)}$ zu berechnen.</td><td>$$K_k = K_0 - T_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q-1} = K_0 - T_1 \cdot s_k$$ $[\text{für } 1 \le k \le n]$
speziell: $K_n = K_0 - T_1 \cdot s_n = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(Restschuld am Ende des k-ten Jahres bzw. Barwert der folgenden Annuität)</td><td>A = Annuität
K_k = Restschuld Ende k-ten J.
K_0 = Kapital zu Beginn
q = Aufzinsungsfaktor (1+i)
k = ”Jahrzahl”
s_k = Endwertfaktor nachschüssig</td><td>$$K_k = K_0 \cdot q^k - A \cdot s_k = K_0 \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q-1}$$</td></tr>
<tr><td>K_k = Restschuld Ende k-ten J.
n-k = Restlaufzeit
A = Annuität
q = Aufzinsungsfaktor (1+i)</td><td>$$K_k = A \cdot \frac{1}{q^{n-k}} \cdot \frac{q^{n-k} - 1}{q-1}$$</td></tr>
</table>

3. Verschuldungsformen (Forts.)

Serienanleihen / mit Stückelung	Annuität	K_0 = Kapital zu Beginn n = Anzahl Jahre A = Annuität a_n = Barwertfaktor nachschüssig q = Aufzinsungsfaktor (1+i)	$A = \frac{K_0}{a_n} = \frac{K_0}{\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} = \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$
	Faktor q	A = Annuität T_1 = 1. Tilgungsrate q = Aufzinsungsfaktor (1+i) n = Anzahl Jahre	$q^n = \frac{A}{T_1}$ $\qquad q = \sqrt[n]{\frac{A}{T_1}}$
	Laufzeit n	A = Annuität T_1 = 1. Tilgungsrate q = Aufzinsungsfaktor (1+i) n = Anzahl Jahre	$q^n = \frac{A}{T_1}$ $\qquad n = \frac{\lg A - \lg T_1}{\lg q}$
	<u>Jahr</u> <u>Kapital zu Beginn des Jahres</u> <u>Zinsen am Ende des Jahres</u> <u>Tilgung am Ende des Jahres</u> <u>Stück</u> <u>Rest</u> <u>Jahresaufwand</u>		
	Stück	$Tilgung_k$ = Tilgung am Ende des k-ten Jahres $Rest_{k-1}$ = Rest des Vorjahres Nominal = Nominal der Obligationenstückelung Dies entspricht der effektiv möglichen zu tilgenden Obligationenschuld, wobei der Rest des Vorjahres mitberücksichtigt werden muss.	$\text{Stück} = \frac{Tilgung_k + Rest_{k-1}}{Nominal}$ (Betrag ist abzurunden)
	Rest	$Tilgung_k$ = Tilgung am Ende des k-ten Jahres Restk-1 = Rest des Vorjahres $Stück_k$ = Stück des k-ten Jahres Nominal = Nominal der Obligationenstückelung	$Rest = \left(Tilgung_k + Rest_{k-1}\right) - \left(Stück_k * Nominal\right)$
	Jahresaufwand	JW = Jahresaufwand $Zinsen_k$ = Zinsen des k-ten Jahres $Stück_k$ = Stück des k-ten Jahres Nominal = Nominal der Obligationenstückelung	$JW = Zinsen_k + (Stück_k \cdot Nominal)$
	Kapital im Folgejahr	K_0 = Kapital Nominal = Nominal der Obligationenstückelung	$K_{Folgejahr} = K_{Vorjahr} - (Stück_{Vorjahr} \cdot Nominal)$
	Bei gleicher Tilgung	Tilgung bestimmen, wobei das Gesamtnominal der gesamten Anleihensschuld (nominell) entspricht. Der Jahresaufwand ergibt sich aus Tilgung + Zinsen.	$Tilgung = \frac{Gesamtnominal}{Laufzeit\ in\ Jahren}$
	Bei gleichem Jahresaufwand (Annuität)	Annuität bestimmen. K_0 = Kapital zu Beginn n = Anzahl Jahre A = Annuität a_n = Barwertfaktor nachsch. Die Tilgung ergibt sich aus der Differenz von Annuität – Zinsen.	$A = \frac{K_0}{a_n} = \frac{K_0}{\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} = \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$

4. Kursrechnen

Kursrechnen	Kurs	C_0 = Kurs K^{nom}= Nominalwert K^{real} = Barwert der ausstehen den Cash-Flows abgezinst mit q_{real} p_{nom}= nomineller Zinsfuss p_{real} = realer Zinsfuss	$C_0 = \frac{K_0^{(real)}}{K_0^{(nom)}} * 100$
	Kurs / Wert einer einmaligen Schuld	W = Übernahmewert K_0 = Schuldenauszahlung zu Beginn C_0 = Kurs einmalige Schuld n = Gesamtlaufzeit k = verstrichene Anzahl Jahre n-k = Restlaufzeit q_{real} = Aufzinsungsfaktor real q_{nom}= Aufzinsungsfaktor nominal	$C_0 = \left[\frac{q_{nom}}{q_{real}}\right]^{n-k} \cdot 100$ $q_{(nom)} > q_{(real)}$ = **über pari** $q_{(nom)} < q_{(real)}$ = **unter pari** $W = \frac{q_{nom}^n \cdot K_0}{q_{real}^{(n\text{-}k)}}$
	Kurs einer Zinsanleihe	C_0 = Kurs einer Zinsanleihe R = Rücknahmepreis n = Laufzeit q_{real} = Aufzinsungsfaktor real p_{nom}= Zinsfuss nominal	$C_0 = \left[p_{nom} \cdot \frac{1}{q_{real}^n} \cdot \frac{q_{real}^n - 1}{q_{real} - 1}\right] + \frac{R}{q_{real}^n}$
	Kurs einer ewigen Rente	C_0 = Kurs einer ewigen Rente p_{om}= Zinsfuss nominal p_{eal}= Zinsfuss real	$C_0 = \frac{p_{nom}}{p_{real}} \cdot 100$ ➔ gilt für alle Formeln als Schätzformel**!**
	Kurs einer Annuitätenanleihe	C_0 = Kurs einer Annuitätenanleihe q_{real} = Aufzinsungsfaktor real q_{nom}= Aufzinsungsfaktor nominal n = Laufzeit in Jahren	$C_0 = \frac{a_n^{(real)}}{a_n^{(nom)}} * 100$ mit $a_n = \frac{1}{q^n} * \frac{q^n - 1}{q - 1}$
	Kurs einer Ratenschuld (direkte Berechnung)	C_0 = Kurs für Ratenschuld n = Laufzeit p_{nom}= Zinsfuss nominal p_{real} = Zinsfuss real q_{real} = Aufzinsungsfaktor real q_{nom}= Aufzinsungsfaktor nominal	$C_0 = \frac{100}{n} * \left[a_n^{(real)} + \frac{p_{(nom)}}{p_{(real)}} * \left(n - a_n^{(real)}\right)\right]$ mit $a_n^{(real)} = \frac{1}{q_{(real)}^n} * \frac{q_{(real)}^n - 1}{q_{(real)} - 1}$
	Kurs einer Ratenschuld (Konversion) → einfacher!	C_0 = Kurs für Ratenschuld x = mittlere Laufzeit n = Laufzeit R = Rücknahmekurs p_{nom}= Zinsfuss nominal q_{real} = Aufzinsungsfaktor real q_{nom}= Aufzinsungsfaktor nominal	$x = \frac{\lg\ n - \lg\left[\frac{1}{q_{real}^n} \cdot \frac{q_{real}^n - 1}{q_{real} - 1}\right]}{\lg\ q_{real}}$ $C_0 = \left[p_{nom} \cdot \frac{1}{q_{real}^x} \cdot \frac{q_{real}^x - 1}{q_{real} - 1}\right] + \frac{R}{q_{real}^x}$
Rentabilitätsrechnung	Das Rentabilitäts- oder Renditerechnen bildet das Gegenstück zum Kursrechnen. ➔ Es werden die gleichen Formeln wie beim Kursrechnen benutztt, nur die Voraus- ➔ setzungen sind andere: Beim Kursrechnen ist p_{nom} und p_{real} gegeben, gesucht ist der Kurs C_0. Beim Rentabilitätsrechnen ist p_{nom} und C_0 gegeben, gesucht ist p_{real}. Dieses p_{real}.heisst dann auch p_{eff} oder Rendite (auf Verfall) r oder Yield (to maturity).		

5. Rendite von festverzinslichen Wertpapieren

Einfache (statische) Obligationenrendite	für *eine* Periode	C = Coupon (in Prozenten) P_0 = Kaufpreis	$r_{einfach} = \frac{C}{P_0}$
	für *mehrere* Perioden	C = Coupon (in Prozenten) P_0 = Kaufpreis R = Rücknahmepreis n = (Rest-)Laufzeit	$r_{einfach} = \frac{C}{P_0} + \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{R - P_0}{P_0}\right)$
Barwertmodell	jährliche Coupons	PV = Tagespreis (Present-Value) C = Coupon (in Prozenten) r_M = Marktzinssatz n = (Rest-)Laufzeit in Jahren R = Rücknahmepreis	$PV(A) = \left(C \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r_M)^t}\right) + \frac{R}{(1+r_M)^n}$
		PV = Tagespreis (Present-Value) C = Coupon n = (Rest-)Laufzeit in Jahren R = Rücknahmepreis a_n = Barwertfaktor nachsch. q^n = Aufzinsungsfaktor	$PV(A) = C \cdot a_n + \frac{R}{q^n}$ $= C \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{R}{q^n}$ $= C \cdot \frac{1}{(1+r_M)^n} \cdot \frac{(1+r_M)^n - 1}{(1+r_M) - 1} + \frac{R}{(1+r_M)^n}$
	mehrere Cps jährlich	PV = Barwert (Present-Value) C = Jahres-Coupon n = (Rest-)Laufzeit in Jahren r_M = Marktzinssatz m = Anzahl Coupons pro Jahr R = Rücknahmepreis q = q_{konf} x = Anzahl Zahlungen in einer Zinsperiode (meist 1)	$PV(A) = \sum_{t=1}^{n \cdot m} \left(\frac{\frac{1}{m} \cdot C_t}{\left(1 + \frac{r_M}{m}\right)^t} \right) + \frac{R}{\left(1 + \frac{r_M}{m}\right)^{n \cdot m}}$ $PV(A) = \frac{C_t}{m} * \frac{1}{q^{n \cdot m}} * \frac{q^{n \cdot m} - 1}{q - 1} + \frac{R}{q^{n \cdot m}}$ mit $q = \sqrt[x]{1 + \frac{r_M}{m}}$
	Barwert während der Laufzeit	$PV_{\Delta t}$ = Barwert während der Laufzeit PV = Tagespreis (Present-Value) r_M = Marktzinssatz Δt = Tage *seit* letzter Coupon-Zahlung bis heute	$PV_{\Delta t}(A) = (1 + r_M)^{\frac{\Delta t}{360}} \cdot PV(A)$
Endwert		FV = Future Value (Endwert) C = Jahres-Coupon r_M = Marktzinssatz n = (Rest-)Laufzeit in Jahren R = nom. Rückzahlungsbetrag	$FV(A) = \sum_{t=1}^{n} \left(C_t \cdot (1 + r_M)^{n-t} \right) + R$

5. Rendite von festverzinslichen Wertpapieren (Forts.)

<table>
<tr><td rowspan="4">Rendite auf Verfall (Yield to Maturity)</td><td>Unmittelbar bei Cps-Verfall</td><td>P_0 = Börsen- / Tagespreis
C_t = Jahres-Coupon
n = (Rest-)Laufzeit
R = Rücknahmepreis
r_A = Rendite (Effektivverzinsung)</td><td>$P_0 = C_t \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{R}{q^n}$
$\left[\text{mit } q = (1 + r_A)\right]$</td></tr>
<tr><td>Unterjährig (d.h. nicht per Verfall-tag)</td><td>P_T = Börsen- / Tagespreis
P_0 = Preis flat oder ex
C_t = Jahres-Coupon
n = (Rest-)Laufzeit aufgerundet
R = Rücknahmepreis
r_A = Rendite (Effektivverzinsung)
Δt = Tage seit letzter Coupon-Zahlung bis zum Erwerb</td><td>$P_T = (1 + r_A)^{\frac{\Delta t}{360}} \cdot P_0$
$P_T = q^{\frac{\Delta t}{360}} \cdot \left(C_t \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{R}{q^n} \right)$
$\left[\text{mit } q = (1 + r_A)\right]$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ex oder flat Die Anleihe / Der Preis ist exklusive Marchzinsen
Cum Die Anleihe / Der Preis ist inklusive Marchzinsen
➔ normaler Kurs ist immer ex: ‚Preis flat' plus Marchzinsen ergibt ‚Preis cum'.</td></tr>
<tr><td>Marchzinsen</td><td>M = Marchzinsen
C_t = Jahres-Coupon
r_A = Rendite (Effektivverzinsung)
Δt = # Tage seit der letzten Coupon-Zahlung bis zum Erwerb</td><td>$M = C_t \cdot \frac{q^{\frac{\Delta t}{360}} - 1}{q - 1}$ $\left[\text{mit } q = (1 + r_A)\right]$
oder einfacher:
$M = C_t \cdot \frac{\Delta t}{360}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rendite auf mittlerem Verfall</td><td>Berechnung mittlerer Verfall</td><td>n = mittlere Laufzeit
n_1 = Anzahl Jahre bis 1. Auslosung
n_2 = Anzahl Jahre von 1. Auslosung bis Rückzahlung</td><td>$n = n_1 + \frac{n_2}{2}$</td></tr>
<tr><td>Banken-formel</td><td>r_A = Rendite (Effektivverzinsung)
P_T = Börsen-/Tagespreis
C = Jahres-Coupon
n = mittlere Laufzeit
R = Rücknahmepreis</td><td>$r_A = \frac{C + \frac{R - P_t}{n}}{\frac{R + P_t}{2}} \cdot 100$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Duration</td><td>Berechnung</td><td>D = Duration
P_0 = Börsen- / Tagespreis
C_t = Cash-Flows (Cps. oder Rückzahlung)
r_M = Marktzins oder, falls nicht vorhanden, Rendite auf Verfall
t = Dauer, z.T. auf Tage genau</td><td>$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{C_t}{(1 + r_M)^t} * t \right)}{P_0}$
Berechnung in Tabelleform
<table><tr><th>t</th><th>CF</th><th>Barwert</th><th>Barwert x t</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Anwendung (als modified Duration)</td><td>D = Duration
ΔC = Veränderung des Obligationen-Kurs (in %)
r_A = Rendite auf Verfall (in %)
Δp_{real} = Veränderung des Marktzinses (in %)</td><td>$\Delta C \approx \frac{-D}{1 + r_A} \cdot \Delta p_{real}$</td></tr>
</table>

6. Rendite von Aktien

Historische Renditen für eine Periode	Einfache Rendite	r_t = Jahresrendite P_{t-1} = Kaufpreis P_t = Verkaufspreis D_t = Dividende in SFr	$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1$
	stetige Rendite	${}_k r_t$ = stetige Jahresrendite P_{t-1} = Kaufpreis P_t = Verkaufspreis D_t = Dividende in SFr	${}_k r_t = \ln(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}})$
Historische Renditen für mehrere Perioden	Einfache Gesamt-rendite	r_{Ges} = einfache Gesamtrendite P_{t-1} = Kaufpreis P_t = Verkaufspreis D_t = Dividende in SFr $\overset{n}{\underset{t=1}{\pi}} x_t = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ ➔ geometrisches Mittel	$r_{Ges} = \overset{n}{\underset{t=1}{\pi}} \left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right) - 1 =$ $= \left(\frac{P_n}{P_0} \right) - 1, \text{falls } D_t = 0$
	stetige Gesamt-rendite	${}_k r_{Ges}$ = stetige Gesamtrendite ${}_k r_t$ = stetige Jahresrendite P_{t-1} = Kaufpreis P_t = Verkaufspreis D_t = Dividende in SFr n = Anzahl Summanden Anzahl Zeitperioden (meistens Jahre oder Monate, Wochen, Tage)	${}_k r_{Ges} = \sum_{t=1}^{n} {}_k r_t = \sum_{t=1}^{n} \ln \left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right) =$ $= \ln \left(\frac{P_n}{P_0} \right), \text{ falls } D_t = 0$
	Einfache durchschnittliche Rendite	r_A = einfache Anlagerendite r_{Ges} = einfache Gesamtrendite P_{t-1} = Periodenanfangspreis P_t = Periodenendpreis D_t = Dividende in SFr n = Anzahl Faktoren = Anzahl Zeitperioden (meistens Jahre oder Monate, Wochen Tage)	$r_A = \sqrt[n]{1 + r_{Ges}} - 1 = \sqrt[n]{\overset{n}{\underset{t=1}{\pi}} \left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right)} - 1 =$ $= \sqrt[n]{\left(\frac{P_n}{P_0} \right)} - 1, \text{ falls } D_t = 0$
	steige durchschnittliche Rendite	${}_k r_A$ = stetige Anlagerendite ${}_k r_{Ges}$ = stetige Gesamtrendite ${}_k r_t$ = stetige Jahresrendite	${}_k r_A = \frac{1}{n} \cdot {}_k r_{Ges} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} {}_k r_t$
	gegenseitige Überführung	${}_k r_t$ = stetige Rendite r_t = einfache Rendite	${}_k r_t = \ln(r_t + 1) \Leftrightarrow r_t = e^{{}_k r_t} - 1$
Annualisierte Rendite	Durchschnittliche Tages-, Wochen- oder Monatsrenditen müssen annualisiert werden: Mögliche Werte für n sind: n = 12, 50 oder 252, je nach dem, ob von durchschnittlichen Monats-, Wochen- oder Tageswerten ausgegangen wird.		r^{ann} = (Rendite pro Periode) · (Anzahl Perioden p.a.) $r^{ann} = r \cdot n$
Effektive annualisierte Rendite	Einfache Rendite	$r_{eff}^{ann} = (1 + r)^n - 1$	Stetige annualisierte Renditen sind immer effektiv.
Zukünftige Renditen	einfaches Modell	$E[r_A]$ = erwartete Rendite r_i = Rendite im Szenario i p_i = Wahrscheinlichkeit des Szenarios i	$E[r_A] = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot p_i$

7. Rendite mit Cash-Flows

Es gibt zwei Ansätze, wie eine Durchschnittsrendite mit Cash-Flows (Zahlungsströmen) berechnet wird: Die Geld- und die Zeitrendite.

Geldrendite	Bei der <u>Geldrendite</u> werden alle Zahlungsströme wie auch das investierte Vermögen auf *einen* Zeitpunkt bezogen und entsprechend umgerechnet (diskontiert). Somit ist die Geldrendite abhängig vom Timing und der Höhe der Cash-Flows. Sie kommt daher insbesondere dann zum Einsatz, wenn der Vermögensverwalter Einfluss auf die Höhe und den Zeitpunkt der Cash-Flows nehmen kann.		
	Formel:	Mit P_o = Anfangskurs t = Fälligkeit der CFs C_t = Zahlungsstrom n = Laufzeit r_G = Geldrendite	$P_o = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_G)^t}$ mit $C_t < 0$, falls C_t Inflow (Zufluss) $C_t > 0$, falls C_t Outflow (Abfluss)
	Kommentar:	Die Formel ist analog zum Internen Ertragssatz (IRR) der dynamischen Investitionsrechnung und ist nur mit einem Gleichungslöser lösbar.	
Zeitrendite	Die <u>Zeitrendite</u> ist um die Zahlungsströme bereinigt und widerspiegelt den erwirtschafteten durchschnittlichen Ertrag aus dem Vermögensbestand. Die Cash-Flows werden gar nicht in die Rechnung einbezogen, Man tut also so, als ob gar keine Cash-Flows stattgefunden haben. Somit ist die Zeitrendite unabhängig vom Timing und der Höhe der Cash-Flows. Sie kommt überall dort zum Einsatz, wo der Vermögensverwalter *keinen* Einfluss auf die Höhe und den Zeitpunkt der Zahlungsströme nehmen kann.		
	Formel:	Mit P_n = Endkurs / -wert P_0 = Anfangskurs / -wert des Portfolios r_{Ges} Gesamtrendite n = Laufzeit in Jahren r_Z = Zeitrendite	$r_Z = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$ oder $= \sqrt[n]{(1+r_{Ges})} - 1$
	Kommentar:	Die Berechnung ist somit denkbar einfach und entspricht der Renditeberechnung von Aktien ohne Dividenden.	
Wichtiger Hinweis	Die beiden Resultate können stark differieren; entscheidend ist der Anwendungszweck.		

8. Rendite anderer Anlagemedien

Auch hier gibt es wieder zwei Ansätze: einfache oder stetige Rendite (Verzinsung).			
Edelmetalle	Für eine Periode	r_t = einfache Jahresrendite ${}_k r_t$ = stetige Jahresrendite P_t = Preis Zeitpunkt t P_{t-1} = Preis 1 Jahr vor Zeitpunkt t	$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}$ (einfache Rendite) ${}_k r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ (stetige Rendite)
	Für mehrere Perioden erhält man folgende Durchschnittswerte	r_E = einfache Rendite ${}_k r_E$ = stetige Rendite P_t = Preis Zeitpunkt t P_{t-1} = Preis 1 Jahr vor Zeitpunkt t n = Anzahl Faktoren bzw. Summanden wobei $\pi_{t=1}^{n} x_t = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ (Das gr. Π steht für ein Produkt)	$r_E = \sqrt[n]{\pi_{t=1}^{n}\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)} - 1$ (einfache Edelmetall-Rendite) ${}_k r_E = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ (stetige Edelmetall-Rendite)
Anlagefonds ohne jährliche Ausschüttung	Fonds ohne jährliche Ausschüttung ('thesauriende Fonds') verhalten sich wie Edelmetalle: Der Ertrag liegt einzig im Kursgewinn, Formeln wie oben.		
Mit jährlicher Ausschüttung	Für eine Periode	r_t = einfache Jahresrendite ${}_k r_t$ = stetige Jahresrendite P_t = Preis Zeitpunkt t P_{t-1} = Preis 1 Jahr vor Zeitpunkt t A_t = jährliche Ausschüttung	$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + A_t}{P_{t-1}}$ (einfache einperiodige Rendite) ${}_k r_t = \ln\left(\frac{P_t + A_t}{P_{t-1}}\right)$ (stetige einperiodige Rendite)
	Für mehrere Perioden erhält man folgende Durchschnittswerte	r_F = einfache Rendite ${}_k r_F$ = stetige Rendite r_F = Rendite Anlagefonds P_t = Preis Zeitpunkt t P_{t-1} = Preis 1 Jahr vor Zeitpunkt t A_t = jährliche Ausschüttung n = Anzahl Faktoren bzw. Summanden $\pi_{t=1}^{n} x_t = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$	$r_F = \sqrt[n]{\pi_{t=1}^{n}\left(\frac{P_t + A_t}{P_{t-1}}\right)} - 1$ (einfache Fonds-Rendite) ${}_k r_F = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln\left(\frac{P_t + A_t}{P_{t-1}}\right)$ (stetige Fonds-Rendite)
	P.S.: Diese Formeln sind identisch mit den Formeln für historische Renditen bei Aktien, siehe Kap 6.		
Immobilien	Für Immobilien gelten die gleichen Formeln wie für Edelmetalle oder Anlagefonds, je nachdem, ob jährliche Erträge mit zu berücksichtigen sind oder nicht.		

9. Risiko und Rendite von Einzelpositionen

Streuung / Risiko (Standard-abweichung)	für historische Daten	s = Standardabweichung s^{HP} = Standardabweichung HP n = Anzahl Daten x_i = Renditewert i $\bar{x}$ = Renditen-Mittelwert	$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
		Umrechnung $n \leftrightarrow n-1$ (Stichprobe vs. Gesamtpopulation)	$s^{HP} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} = s$ (Achtung: HP rechnet immer mit n-1)
	Falls die Zeitabschnitte nur <u>Teile</u> eines ganzen Jahres sind, muss die so berechnete Standardabweichung - wie schon bei den Renditen zuvor - annualisiert werden: $s^{ann} = \sqrt{n} \cdot s$, (mit n = 12, 50 oder 252 wie zuvor, aber wichtig: hier steht n unter der Wurzel).		
	für zukünftige Daten	σ_x = Standardabweichung p_i = Wahrscheinlichkeit des Szenarios i x_i = Rendite im Szenario i $E[X]$ = erwartete Rendite n = Anzahl Daten	$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - E[X])^2}$
	Idee der Normalverteilung für die Interpretation, d.h. Wahrscheinlichkeit von **68%: E[X]** ± **s** bzw. Wahrscheinlichkeit von **95%: E[X]** ± **2s**		
Kovarianz	für historische (stetige) Renditen	$C(X,Y)$ = Kovarianz der Anlagen X und Y n = Anzahl Daten x_i = Rendite i der Anlage X y_i = Rendite i der Anlage Y $\bar{x}$ = Renditen-Mittelwert von X $\bar{y}$ = Renditen-Mittelwert von Y	$C(X,Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$
	für zukünftige (erwartete) Renditen	$C(X,Y)$ = Kovarianz der Anlagen X und Y n = Anzahl Daten x_i = Rendite i der Anlage X y_j = Rendite j der Anlage Y $E[X]$ = erwartete Rendite	$C(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - E[X]) \cdot (y_i - E[Y])$ $E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \quad E[Y] = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot y_j$
	Falls die Zeitabschnitte nur <u>Teile</u> eines ganzen Jahres sind, muss die so berechnete Kovarianz - wie bereits oben die Standardabweichung - annualisiert werden, $C(X,Y)^{ann} = n\, C(X,Y)$. Für n nimmt man die bekannten Werte, wie n = 12, 50 oder 252 wie oben.		
Korrelation	für historische Daten	ρ_{xy} = Korrelation der Anlage X mit der Anlage Y $C(X,Y)$ = Kovarianz der Anlagen X und Y s_x = Standardabweichung der Anlage X s_y = Standardabweichung der Anlage Y	$\rho_{xy} = \frac{C(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$
	für zukünftige Daten	ρ_{xy} = Korrelation der Anlage X mit der Anlage Y $C(X,Y)$ = Kovarianz der Anlagen X und Y σ_X = Standardabweichung der Anlage X (zukünftige) σ_Y = Standardabweichung der Anlage Y (zukünftige)	$\rho_{xy} = \frac{C(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

10. Risiko und Rendite im Portfolio

Erwartete Portfolio-Rendite	Notationen	$E[r_{PF}]$ = erwartete PF-Rendite n = Anzahl Anlagen im PF z_j = Anteil der Anlage j im PF $E[r_j]$ = erwartete Rendite der Position j p_i = Wahrscheinlichkeit des Szenarios i r_i = Rendite bei Szenario i	$E[r_{PF}] = \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot E[r_j]$ mit $E[r_j] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot r_i$
Portfolio-Risiko	Formeln	Die Doppelsumme ist als eine For-Next-Schlaufe zu verstehen σ_{PF} = Standardabweichung des Portfolios n = Anzahl Anlagen im PF z_i = Anteil der Anlage i in % z_j = Anteil der Anlage j in % σ_j = Standardabweichung der Anlage j $C(i,j)$ = Kovarianz der Anlagen i und j σ_* = durchschnittliche Varianz $C(i,j)^*$ = durchschnittliche Kovarianz	$\sigma_{PF}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} z_i \cdot z_j \cdot \sigma_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} z_i \cdot z_j \cdot C(i,j)\right)$ $= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^2 \cdot \sigma_j^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} z_i \cdot z_j \cdot C(i,j)\right)\right)$ $= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^2 \cdot \sigma_j^2\right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j>i}^{n} z_i \cdot z_j \cdot C(i,j)\right)\right)$ mit $\sigma_{PF} = \sqrt{\sigma_{PF}^2}$
	Für **2** Anlagen	$\sigma_{PF}^2 = z_1^2 \cdot \sigma_1^2 + z_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot C(1,2)$	
	Für **3** Anlagen	$\sigma_{PF}^2 = z_1^2 \cdot \sigma_1^2 + z_2^2 \cdot \sigma_2^2 + z_3^2 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot [z_1 \cdot z_2 \cdot C(1,2) + z_1 \cdot z_3 \cdot C(1,3) + z_2 \cdot z_3 \cdot C(2,3)]$	
	Für **n** Anlagen und mit je gleichgrossen Anteilen im PF	$\sigma_{PF} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_j^2\right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j>i}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot C(i,j)\right)\right)}$ $\sigma_{PF} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sigma_*^2 + \frac{n-1}{n} \cdot C(i,j)^*}$	
	Durchschnittliche Varianz und Kovarianz	$\sigma_* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n}}$ $\qquad C(i,j)^* = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j>i}^{n} C(i,j)\right)}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$	
	Grenze des Diversifikationseffektes	Falls $n \to \infty$ dann: $\sigma_{PF} = \sqrt{C(i,j)^*}$ = Marktrisiko (nicht wegdiversifizierbar)	
Beta-Faktor	Für 1 Aktie	β_A = Beta-Faktor der Aktie A $C(A,M)$ = Kovarianz der Anlage A und dem Markt M (z.B. Aktienindex SPI) s_M^2 = historische Varianz des Marktes σ_M^2 = zukünftige Varianz des Marktes	$\beta_A = \frac{C(A,M)}{s_M^2}$, $\quad \beta_A = \frac{C(A,M)}{\sigma_M^2}$

11. Performancemessung

Beta-Faktor (Forts.)	Für ein PF	β_{PF} = Beta-Faktor des PFs β_j = Beta-Faktor der Aktie j z_j = Anteil der Aktie j am Portfolio in % n = Anzahl Aktien	$\beta_{PF} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot z_j$
	Theorie	Der Beta-Faktor widerspiegelt die Sensitivität einer Aktie bzw. eines Portfolios gegenüber einem nationalen Markt. Er stellt die relative Schwankung der Aktie bzw. des Portfolios gegenüber einem nationalen Marktindex dar.	
Bestimmtheitsmass R^2	Für 1 Aktie	R_A^2 = Markt-Risiko-Anteil in % β_A = Beta-Faktor der Aktie A s_M^2 = Varianz des Marktes s_A^2 = Varianz der Aktie A	$R_A^2 = \frac{\beta_A^2 \cdot s_M^2}{s_A^2}, R_A^2 = \frac{\beta_A^2 \cdot \sigma_M^2}{\sigma_A^2}$
		ρ_{AM} = Korrelation Markt / Aktie R_A^2 = Markt-Risiko-Anteil in %	$\rho_{AM}^2 = R_A^2$
	Für ein PF	R_{PF}^2= Markt-Risiko-Anteil in % β_{PF} = Beta-Faktor des PFs s_M^2 = Varianz des Marktes s_{PF}^2 = Varianz des Portfolios	$R_{PF}^2 = \frac{\beta_{PF}^2 \cdot s_M^2}{s_{PF}^2}, R_{PF}^2 = \frac{\beta_{PF}^2 \cdot \sigma_M^2}{\sigma_{PF}^2}$
	Theorie	R^2 bestimmt den Anteil der marktbedingten Varianz (systemati sches Risiko) an der gesamten Varianz (in Prozenten).	
Capital-Market-Line (CML)	Theorie	Bei der CML erscheint die erwartete Rendite als lineare Funktion des Gesamtrisikos eines PFs. Alle effizienten PFs liegen auf der CML, nicht aber Einzeltitel.	$E[r_{PF}] = r_f + \frac{(E[r_M]-r_f)}{\sigma_M}\sigma_{PF}$
Security-Market-Line (SML)	Theorie	Bei der SML erscheint die erwartete Rendite als lineare Funktion von β. Alle korrekt bewerteten Assets liegen auf der SML.	$E[r_A] = r_f + (E[r_M] - r_f)\beta_A$
Capital-Asset-Pricing-Modell (CAPM)	Theorie	Im CAPM erscheint die erwartete Rendite als lineare Funktion des systematischen Risikos eines PFs	$E[r_A] = r_f + \frac{(E[r_M]-r_f)}{\sigma_M^2}\sigma_{AM}$
Sharpe-Ratio SR_A	Für 1 Aktie	$E[r_A]$= Erwarteter Ertrag von A β_A = Beta-Faktor der Aktie A r_f = risikofreier Zinssatz σ_A^2 = Varianz der Aktie A	$SR_A = \frac{E[r_A]-r_f}{\sigma_A}$ 'Rew. to Volatility'
	Theorie	SR_A gibt die Überschussrendite pro Gesamtrisikoeinheit σ an.	
Treynor-Ratio TR_A	Für 1 Aktie	$E[r_A]$= Erwarteter Ertrag von A β_A = Beta-Faktor der Aktie A r_f = risikofreier Zinssatz	$TR_A = \frac{E[r_A]-r_f}{\beta_A}$ 'Reward to β'
	Theorie	TR_A gibt die Überschussrendite pro systematische Risikoeinheit β an.	
α - Faktor	Für 1 Aktie	$E[r_M]$= Erw. Ertrag des Marktes β_A = Beta-Faktor der Aktie A r_f = risikofreier Zinssatz r_A = Ertrag der Aktie A	$\alpha_A = r_A - E[r_A]$ $= r_A - (r_f + (E[r_M] - r_f)\beta_A)$
	Theorie	α gibt das Ungleichgewicht zwischen effektiver und erwarteter Rendite an und ist für unterbewertete Aktien positiv und für überbewertete negativ.	

12. Derivative Elemente

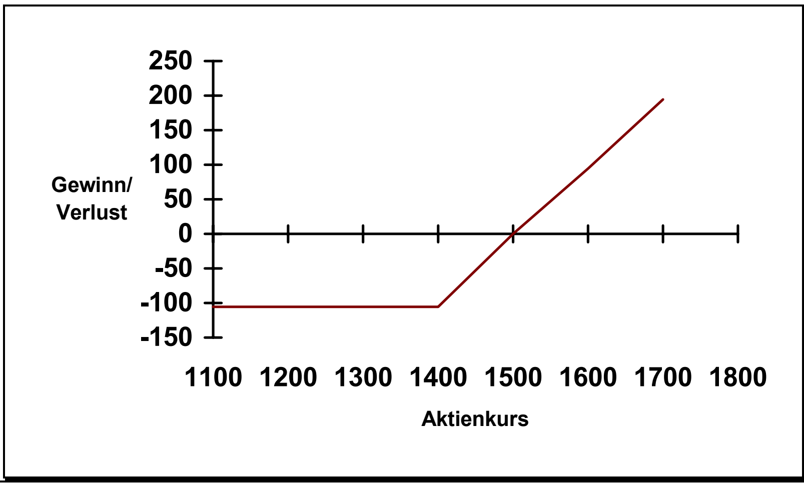
Allen Derivaten ist gemeinsam, dass sie auf einem real existierenden (Finanz-) Produkt aufbauen, mit diesem verknüpft oder – wie man hier sagt – von diesem abgeleitet (engl. derivative) sind. Als zugrundeliegenden Produkte (‚underlyings') eignen sich grundsätzlich jedes (Finanz-) Produkt: Aktien, Obligationen, Devisen, Zinsen, Indizes, Baskets, etc. Daher ist der Markt der Derivate der am stärksten und am kreativsten wachsende Markt.

Optionen

Call

Der Call-Käufer erwirbt mit der Bezahlung des Optionspreis das Recht, innerhalb der Laufzeit den Underlying zum festgesetzten (Strike-) Preis zu kaufen. Er wird insbesondere dann von seinem Recht Gebrauch machen, wenn der Underlying den Strikepreis mindestens erreicht hat. Nur dann hat die Option einen wirklichen oder inneren Wert.
Der Call-Schreiber oder Verkäufer erhält den Optionspreis und muss bei Ausübung den Underlying liefern.

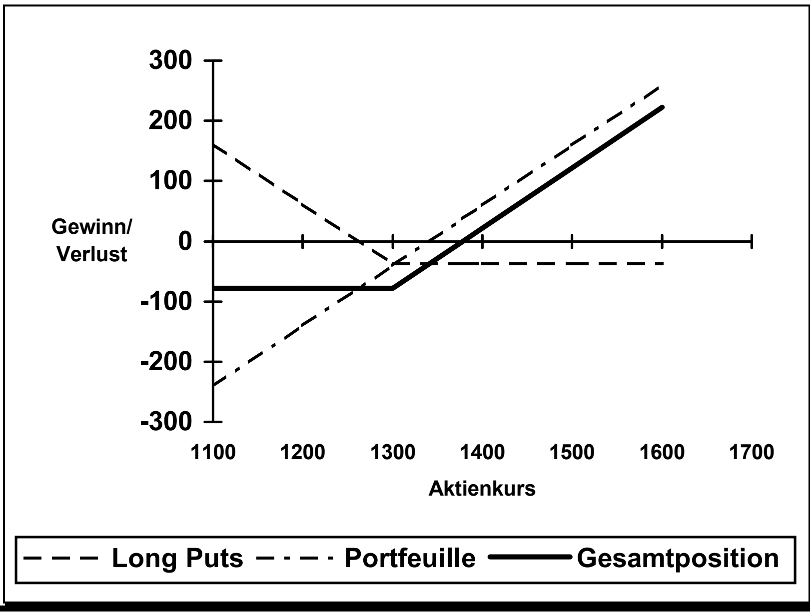
Graphik: Optionspreis: 100, Strike: 1400



Put

Der Put-Käufer erwirbt mit der Bezahlung des Optionspreis das Recht, innerhalb der Laufzeit den Underlying zum festgesetzten (Strike-) Preis zu verkaufen. Er wird insbesondere dann von seinem Recht Gerauch machen, wenn der Preis des Underlying unter den Strike gefallen ist.
Der Put-Schreiber oder Verkäufer erhält den Optionspreis und muss bei Ausübung den Underlying entgegennehmen.

Graphik: Der PUT-Kauf als Absicherung: Optionspreis: 20, Strike: 1300



12. Derivative Elemente (Forts.)

<table>
<tr><td>Typen von Optionen</td><td colspan="2">Es muss stets zwischen <u>europäischen</u> und <u>amerikanischen</u> Optionen unterschieden werden:
Europäischen Optionen können nur am Verfall ausgeübt werden, während amerikanische schon während der Laufzeit ausgeübt werden können. Ein Handel (also Kauf und Verkauf) ist jedoch immer möglich.</td></tr>
<tr><td>Optionsstrategien</td><td colspan="2">Beliebt ist das Eingehen von Optionsstrategien. Dazu werden verschiedene Optionen, Calls und Puts, des gleichen Underlyings gekauft und geschrieben zu verschiedenen Strikepreisen.

Auch können Optionen mit Festgeldanlagen kombiniert werden. So entstehen die sehr beliebten strukturierten Produkte mit den exotischen Namen, wie GROI, EROS, REVEXUS, etc., die alle dadurch einen Kapitalschutz erhalten.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Pricing von Optionen</td><td colspan="2">Das Pricing von Optionen ist aufwendig und schwierig. Für gewisse Spezialfälle lassen sich jedoch Abschätzungen oder Formeln angeben.</td></tr>
<tr><td>Black & Scholes Formel

(gilt in dieser Form nur für europäische Optionen, kann aber als gute Annäherung auch für amerikanische Optionen benutzt werden.)</td><td>$C_t = K\, \Phi(d_1) - S\, e^{-r\Delta t}\, \Phi(d_2)$
$P_t = S\, e^{-r\Delta t}\, \Phi(-d_2) - K\, \Phi(-d_1)$
mit
$d_1 = (\ln(K/S) + (r_f + ½\sigma^2)\Delta t) / \sigma\Delta t^{½}$
$d_2 = d_1 - \sigma\, \Delta t^{½}$
(Für die Variablen: siehe Greek Letters)</td></tr>
<tr><td>Greek Letters</td><td>
<table>
<tr><th>Einflussfaktoren</th><th>Call</th><th>Put</th><th>Parameter</th></tr>
<tr><td>steigender Faktor</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ausübungspreis (S)</td><td>↓</td><td>↑</td><td></td></tr>
<tr><td>Aktueller Basiswertkurs (K)</td><td>↑</td><td>↓</td><td>δ (Delta)</td></tr>
<tr><td>Optionsdelta (δ)</td><td></td><td></td><td>χ (Gamma)</td></tr>
<tr><td>Restlaufzeit (Δt)</td><td>↑</td><td>↑</td><td>ϑ (Theta)</td></tr>
<tr><td>Volatilität des Basiswertes (σ)</td><td>↑</td><td>↑</td><td>τ (Tau)</td></tr>
<tr><td>Risikofreier Zins (r_f)</td><td>↑</td><td>↓</td><td>ρ (Rho)</td></tr>
<tr><td>Dividende</td><td>↓</td><td>↑</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Call – Put – Theorem</td><td>$P_t = C_t + PV_{\Delta t}(S) - K_t$
(gilt so nur für europäische Optionen)</td></tr>
<tr><td>Futures</td><td colspan="2">Futures sind spezielle Termingeschäfte, in denen sich die Partner jedoch zur Lieferung oder (sogar) täglichen Abgeltung verpflichten. Ähnlich den Optionen sind auch hier Menge, Underlying, Laufzeit und Ausübungspreis für die Vertragsdauer fixiert. Futures können nur am Verfall ausgeübt werden, die meisten werden vorher verkauft oder glattgestellt. Da eine physische Lieferung meist nicht möglich ist, bleibt nur die Möglichkeit des Barausgleichs.</td></tr>
</table>

Anhang Copyright